ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΕΣ
ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ 2009

# Μαθηματικά Κατεύθυνσης

## 1ο ΘΕΜΑ

Δίνεται η συνάρτηση $f:(1, +\infty)\to R$ η οποία είναι παραγωγίσιμη με $2f(x) = -x\cdot f'(x)\cdot \ln x,\ x>1 \quad (1)$
Αν f(e)=1, να βρεθεί ο τύπος της f.

## 2ο ΘΕΜΑ

Έστω η συνεχής συνάρτηση $f:[0, +\infty)\to R$ με f(0) =0 η οποία έχει παράγωγο $f'$ στο $(0, +\infty)$ με $f'$ γνήσια αύξουσα στο $(0, +\infty)$. Θεωρούμε την συνάρτηση g με $g(x) = \frac{f(x)}{x}$

Να αποδειχθεί ότι η g είναι γνήσια αύξουσα στο $(0, +\infty)$.

## 3ο ΘΕΜΑ

Έστω $f:R\to R$, η οποία είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο R με $f'(\alpha) = f'(\beta) = 0$ και για κάθε $x \in R$ ισχύει $f''(x) \geq 0$

όπου $\alpha\neq\beta$. Να δειχθεί ότι $f(\alpha) = f(\beta)$.

## 4ο ΘΕΜΑ

Δίνονται οι μιγαδικοί $z=\lambda(1+i\,\alpha^{\eta\mu x})$ λ>0, α>0 και $w=\lambda+\lambda\cdot\eta\mu x+\lambda i$ για τους οποίους ισχύει ότι $|\bar{z} - w| \leq |z+\bar{w}|$.
Δείξτε ότι α=e.

## 5ο ΘΕΜΑ

Αν για τον μιγαδικό z ισχύει $e^{|z-1|\cdot x} \geq |z+1|\,x+1$, για κάθε $x\in R$ να δείξετε ότι $z \in I$.

## 6ο ΘΕΜΑ

Έστω η παραγωγίσιμη συνάρτηση f για την οποία ισχύει $8f'(x) \geq f^2(1) + f^2(3) - 2f(1) + 5,\ x\in R$ να βρεθούν οι f(1), f(3)

## ΛΥΣΕΙΣ

## ΛΥΣΗ 1ου ΘΕΜΑΤΟΣ

$$2f(x)= -x\cdot f'(x)\cdot \ln x \Leftrightarrow \frac{2}{x} f(x) = -f'(x)\cdot \ln x$$

$$\Leftrightarrow 2(\ln x)' f(x) = -f'(x)\ln x \Leftrightarrow 2\ln x\ (\ln x)' f(x) = -f'(x)\,(\ln x)^2$$

$$\Leftrightarrow (\ln^2 x)' f(x) + f'(x)\,(\ln x)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow (f(x)\cdot \ln^2 x)' = 0 \Leftrightarrow f(x) = \ln^2 x = c \quad (2)$$

Η (2) για x=e δίνει: $(f(e)\cdot \ln^2 e = c \Leftrightarrow 1\cdot 1^2= c \Leftrightarrow c =1$
Οπότε $f(x) \ln^2 x = 1 \Leftrightarrow f(x) = \frac{1}{\ln^2 x},\ x>1$

## ΛΥΣΗ 2ου ΘΕΜΑΤΟΣ

Η g είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ ως πηλίκο παραγωγίσιμων συναρτήσεων με $g'(x) = \frac{xf'(x) - f(x)}{x^2},\ x>0,\ (1)$

Στο [0,x) η f ικανοποιεί της προϋποθέσεις του Θ.Μ.Τ. οπότε υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in (0,x)$ έτσι ώστε

$$f(x) - f(0) = (x-0)\, f'(\xi) \Leftrightarrow f(x) - 0 = x\, f'(\xi)$$

$$\Leftrightarrow f(x) = x\, f'(\xi) \quad (2)$$

Η (1) βάσει της (2) γίνεται:

$$(g)'(x) = \frac{xf'(x) - xf'(\xi)}{x^2} = \frac{f'(x) - f'(\xi)}{x},\quad x>0$$

Επειδή η $f'$ είναι γνησίως αύξουσα, ισχύει $f'(\xi) < f'(x)$

άρα $g'(x) > 0$ οπότε η g είναι γνησίως αύξουσα στο

$(0, +\infty)$

## ΛΥΣΗ 3ου ΘΕΜΑΤΟΣ

Είναι $\alpha\neq\beta$ επομένως θεωρούμε ότι α<β. Στο [α, β] η f ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του Θ.Μ.Τ οπότε υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in (\alpha,\beta)$ έτσι ώστε $f(\beta) - f(\alpha) = f'(\xi)\,(\beta-\alpha) \quad (1)$

Επειδή για κάθε $x \in R$ είναι $f''(x) \geq 0$ άρα η $f'$ είναι αύξουσα στο R οπότε για α<ξ<β ισχύει
$0 = f'(\alpha) \leq f'(\xi) \leq f'(\beta) = 0$ δηλαδή $f'(\xi) = 0 \quad (2)$

Άρα η (1) λόγω της (2) γίνεται f(β) - f(α) =0 (β-α) ⇔
⇔ f(β) - f(α)=0 ⇔ f(β) = f(α)

## ΛΥΣΗ 4ου ΘΕΜΑΤΟΣ

$$|\bar{z} - w| \leq |z+\bar{w}| \Leftrightarrow |\bar{z} - w|^2 \leq |z+\bar{w}|^2 \Leftrightarrow$$

$$(\bar{z} - w)\,(z-\bar{w}) \leq (z+\bar{w})\,(\bar{z}+w) \Leftrightarrow$$

$$\bar{z}z - \bar{z}\bar{w} - wz + w\bar{w} \leq z\bar{z} + zw + \bar{w}\bar{z} + w\bar{w} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2zw + 2\bar{z}\bar{w} \geq 0 \Leftrightarrow 2\,(zw + \bar{z}\bar{w}) \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 4\mathrm{Re}\,(zw) \geq 0 \Leftrightarrow \mathrm{Re}\,(zw) \geq 0 \quad (1)$$

Είναι $z\cdot w =\lambda\,(\iota +\iota\,\alpha^{\eta\mu x})\,(\lambda+\lambda\eta\mu x +\lambda\iota)$
$= \lambda^2[1+\eta\mu x - \alpha^{\eta\mu x} + (1+(1+\eta\mu x)\alpha^{\eta\mu x})\,\iota]$
άρα $\mathrm{Re}(zw) = \lambda^2 + \lambda^2\,\eta\mu x - \lambda^2\cdot\alpha^{\eta\mu x}$
Οπότε λόγω της (1) ισχύει $\lambda^2 + \lambda^2\,\eta\mu x - \lambda^2\cdot\alpha^{\eta\mu x} \geq 0$, για κάθε $x \in R$.
Θεωρούμε $f(x) = \lambda^2 + \lambda^2\,\eta\mu x - \lambda^2\cdot\alpha^{\eta\mu x}$ είναι $f(x) \geq 0$ για κάθε $x \in R$.
Για x=κπ, κ∈ Z είναι f(κπ)=0 οπότε για κάθε $x \in R$ είναι $f(x) \geq f(\kappa\pi)$ άρα η f στις θέσεις x=κπ παρουσιάζει ελάχιστο. Η f είναι παραγωγίσιμη στο R με

$$f'(x) = \lambda^2(\sigma\upsilon\nu x - \ln\alpha\cdot\sigma\upsilon\nu x\cdot \alpha^{\eta\mu x}),\quad x\in R.$$

Η f παρουσιάζει ακρότατο στις εσωτερικές θέσεις x=κπ, κ∈ Z οπότε σύμφωνα με το θεώρημα Fermat:

$$f'(\kappa\pi) = 0 \Rightarrow \lambda^2\left[\sigma\upsilon\nu(\kappa\pi) - \ln\alpha\cdot\sigma\upsilon\nu(\kappa\pi)\cdot \alpha^{\eta\mu(\kappa\pi)}\right] = 0$$

$$(\sigma\upsilon\nu(\kappa\pi) = (-1)^\kappa) \Leftrightarrow 1 - \ln\alpha =0 \Leftrightarrow \ln\alpha = 1 \Leftrightarrow \alpha = e$$

## ΛΥΣΗ 5ου ΘΕΜΑΤΟΣ

$$e^{|z-1|\cdot x} \geq |z+1|\,x+1 \Leftrightarrow e^{|z-1|\cdot x} - |z+1|\,x-1 \geq 0 \quad (1)$$

Θεωρώ $f(x) = e^{|z-1|\cdot x} - |z+1|\,x-1$ άρα λόγω της (1) είναι

$$f(x) \geq 0 \Rightarrow f(x) \geq f(0) \quad (f(0)=0)$$

Η f ικανοποιεί τις υποθέσεις του Θεωρήματος Fermat άρα $f'(0) = 0$

Άρα $f'(x) = e^{|z-1|\cdot x}\,(|z-1|\,x)' - |z+1| = e^{|z-1|\cdot x}|z-1| - |z+1|$

Οπότε

$$f'(0) = 0 \Rightarrow |z-1| = |z+1| \Leftrightarrow (z-1)\cdot \overline{(z-1)} = (z+1)\cdot \overline{(z+1)}$$

$$\Leftrightarrow (z-1)\cdot (\bar{z}-1) = (z+1)\cdot (\bar{z}+1) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow z\bar{z} - z - \bar{z} +1= z\bar{z} + z + \bar{z} +1 \Leftrightarrow z = -\bar{z} \Leftrightarrow z\in I$$

## ΛΥΣΗ 6ου ΘΕΜΑΤΟΣ

Εφαρμόζω Θ.Μ.Τ στο [1,3] f συνεχής στο [1,3], f παραγωγίσιμη στο (1,3) άρα υπάρχει

$$\xi\in (1,3) : f'(\xi) = \frac{f(3) - f(1)}{2} \quad (1).$$

Ισχύει ότι $8f'(x) \geq f^2(1) + f^2(3) - 2f(1) + 5$, για x=ξ τότε:

$$8\cdot \frac{f(3) - f(1)}{2} \geq f^2(1) + f^2(3) - 2f(1)+5 \Leftrightarrow$$

$$4f(3) - 4f(1) \geq f^2(1) + f^2(3) - 2f(1) +5 \Leftrightarrow$$

$$f^2(1) + 2f(1) + f^2(3) - 4f(3) + 5 \leq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (f(1) +1)^2+(f(3) - 2)^2 \leq 0$$ Άρα f(1)=1, f(3)=2

ΤΑ ΘΕΜΑΤΑ ΕΠΙΜΕΛΗΘΗΚΑΝ ΤΑ ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑ

**ΧΑΣΙΑΚΗΣ**
στον **ΠΕΙΡΑΙΑ**